2 Cognome - Nome - matricola: ....

Fisica Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 22 giugno 2012
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto. Gli elaborati relativi a **2** e **3** vanno consegnati, eventualmente anche in un unico foglio, ma **separatamente** dall'elaborato relativo al testo **1**.

Si consegni un'unica versione del compito, niente brutte copie

Teoria

• Esporre in dettaglio la "Descrizione alla Poinsot" del corpo rigido: scrivere un enunciato e dimostrarlo.

Esercizio

• Si consideri una particella P di massa m vincolata senza attrito sul luogo descritto dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0)$$

La terna $Oxyz$ è un riferimento inerziale con z verticale ascendente: $\mathbf{g} = -g\,\hat{z}, \quad g > 0$. Oltre alla gravità, sulla particella agisce una forza elastica lineare realizzata da una molla di costante elastica $h > 0$ tesa tra il punto fisso $Q = (0, 0, c)$ e la particella P.

Individuare un equilibrio con $z < 0$; a tal scopo, introdurre delle coordinate Lagrangiane e una opportuna immersione vincolare: scrivere in dettaglio. Determinare le condizioni affinché tale equilibrio sia stabile; dare inoltre le condizioni affinché tale equilibrio sia stabile qualunque sia il valore della costante elastica $h > 0$.

Determinare le pulsazioni di Piccola Oscillazione attorno a tale equilibrio stabile.

3 **Cognome - Nome - matricola**: ....

Fisica Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 22 giugno 2012

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto. Gli elaborati relativi a **2** e **3** vanno consegnati, eventualmente anche in un unico foglio, ma **separatamente** dall'elaborato relativo al testo **1**.

Si consegni un'unica versione del compito, niente brutte copie

• Data una funzione di Lagrange $L(q, \dot{q}, t)$, $q \in \mathbb{R}^n$, enunciare e dimostrare il Principio Variazionale di Hamilton. Che regolarità minima su L dobbiamo richiedere per la validità del teorema?

• Sia $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ una generica funzione Hamiltoniana di classe C^2.
Sia $X_H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ il campo vettoriale Hamiltoniano che essa genera. Si supponga che tale funzione H non sia a priori correlata ad una funzione Lagrangiana meccanica mediante la trasf. di Legendre.

1) Dimostrare o negare la seguente affermazione: se (q^*, p^*) è un punto d'equilibrio per le equazioni di Hamilton, questo non può essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

2) I problemi di Cauchy con generico dato iniziale in (q_0, p_0) sono ben posti? cioè, siamo sicuri che almeno localmente esista una ed un'unica soluzione del problema iniziale? o dobbiamo imporre qualche ulteriore ipotesi su H?

Soluzione (traccia):
Esercizio 2

$$q_1, q_2) = (x, y), \quad \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 : \quad (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

$$\mathcal{A} \ni (x, y) \longmapsto \tilde{OP}(x, y) : \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ \tilde{z}(x, y) &= -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{cases}$$

$$\mathcal{U}(x, y) = mg\tilde{z}(x, y) + \frac{h}{2}\left[x^2 + y^2 + (\tilde{z}(x, y) - c)^2\right]$$

$$T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y}\dot{y}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}\dot{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y}\dot{y}\right)^2 + 2\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y}\dot{x}\dot{y}\right]$$

$$0 = \mathcal{U}_{,x} = mg\frac{c}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + h\left[x + (\tilde{z}(x, y) - c)\frac{c\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\right]$$

$$0 = \mathcal{U}_{,y} = mg\frac{c}{b^2}\frac{y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + h\left[y + (\tilde{z}(x, y) - c)\frac{c\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\right]$$

Si nota che $(x^*, y^*) = (0, 0)$, $OP^* = (0, 0, -c)$, è equilibrio.

$$\nabla^2\mathcal{U}(0, 0) = \begin{pmatrix} mg\frac{c}{a^2} + h\left(1 - \frac{2c^2}{a^2}\right) & 0 \\ 0 & mg\frac{c}{b^2} + h\left(1 - \frac{2c^2}{b^2}\right) \end{pmatrix}$$

La condizione sui dati strutturali del problema affinché l'equilibrio $OP^* = (0, 0, -c)$ sia stabile è che i due termini diagonali della matrice sia positivi; la condizione affinché sia stabile per ogni valore positivo di h è:

$$c \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad c \leq \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$T_0(\dot{x}, \dot{y}) = T(0, 0, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt{g\frac{c}{a^2} + \frac{h}{m}\left(1 - \frac{2c^2}{a^2}\right)}$$

$$\omega_2 = \sqrt{g\frac{c}{b^2} + \frac{h}{m}\left(1 - \frac{2c^2}{b^2}\right)}$$

Esercizio 3 Le equazioni di Hamilton sono automaticamente in forma normale e il campo vettoriale è C^1 se H è, come richiesto, C^2: il tal caso il teorema di esistenza e unicità vale. Non ci possono essere equilibri asintoticamente stabili perché H, indipendente dal tempo, è un integrale primo.